

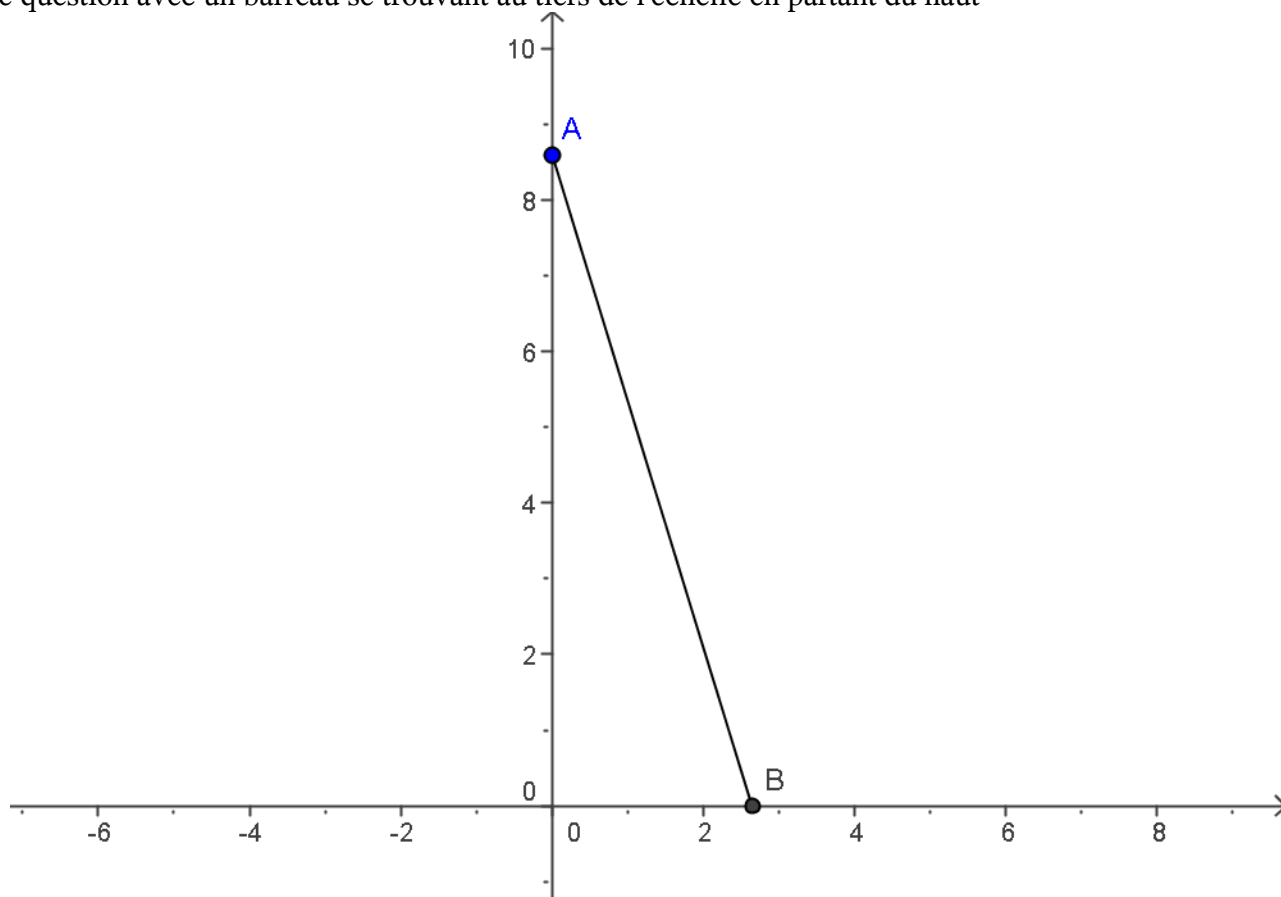
## Exercice de mise en application de géométrie dynamique et rédaction de document mathématique

d'après un problème posé par M Gouy :

### cas concret : l'échelle qui glisse le long d'un mur

Une échelle est posée contre un mur. Quelle est la trajectoire du barreau du milieu si l'échelle vient à glisser le long du mur ?

Même question avec un barreau se trouvant au tiers de l'échelle en partant du haut



### travail à effectuer :

- représenter ces deux situations à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (voir prise en main geogebra)
- conjecturer la trajectoire pour chacun de ces deux cas
- écrire à l'aide d'un traitement de texte la démonstration pour ces deux situations (les plus fêrus pourront le faire sous forme de démonstration animée)

### indication mathématique pour les moins courageux :

Soit un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On considère un point A de l'axe des ordonnées et un point B sur l'axe des abscisses ; on appelle I le milieu de [AB] et a l'angle  $(\widehat{OAB})$

Exprimer les coordonnées de A et B en fonction de a et de AB

En déduire les coordonnées de I

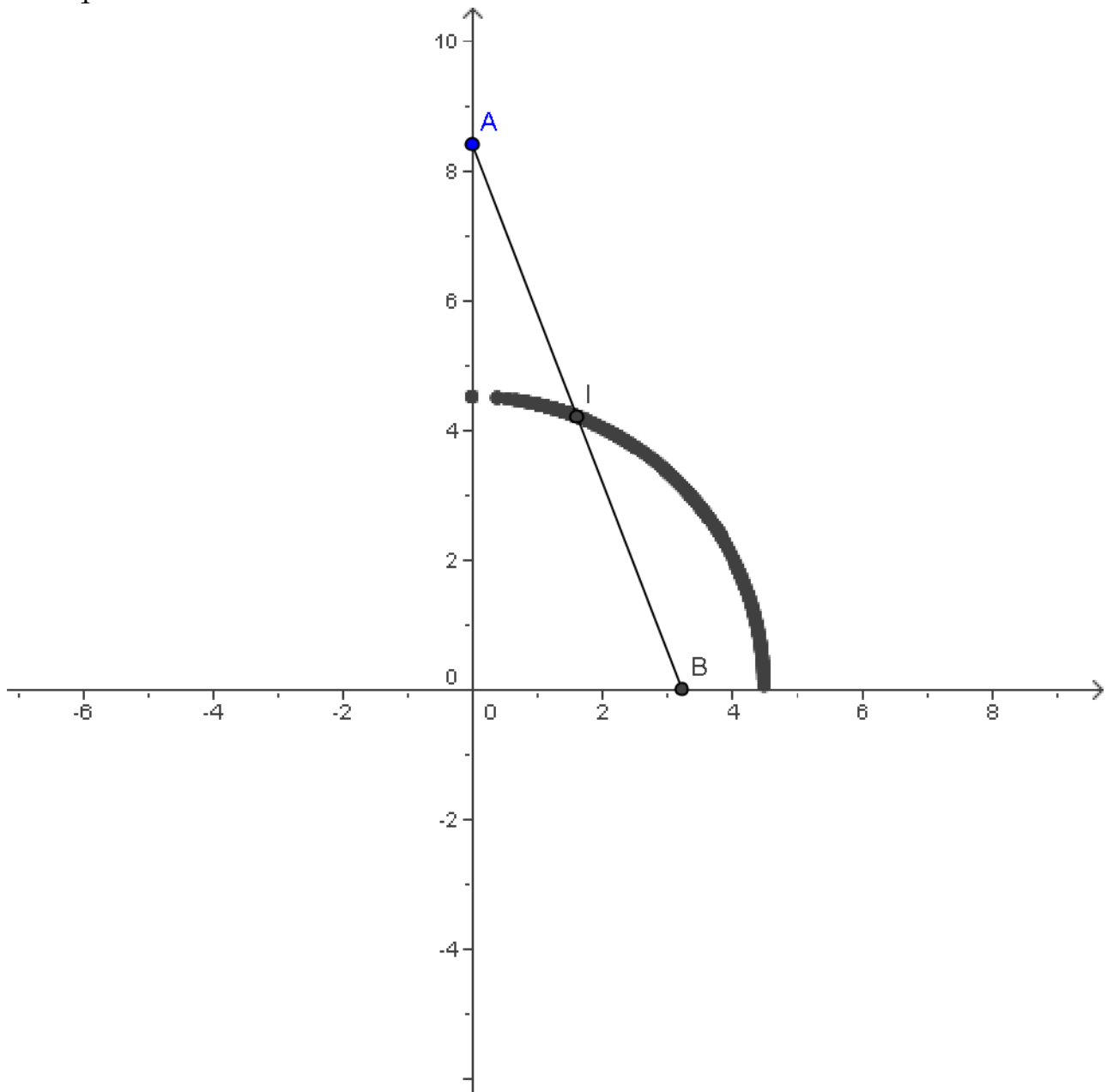
Montrer que les coordonnées de I vérifient l'équation de la courbe conjecturée (on ne fera que le sens direct)

Idem avec J de [AB] tel que  $AJ = \frac{AB}{3}$

### Conjecture pour le point I:

Le point I appartient à un cercle de centre O et de rayon  $\frac{AB}{2}$  c'est à dire la courbe d'équation

$$x^2 + y^2 = \frac{AB^2}{4}$$



### Démonstration :

d'après les règles trigonométriques dans le triangle rectangle :

$$OA = AB \times \cos(a) \text{ et } OB = AB \times \sin(a) \text{ donc } A(0 ; AB \times \cos(a)) \text{ et } B(AB \times \sin(a); 0)$$

$$\text{I est le milieu de } [AB] \text{ donc } x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{AB \times \sin(a)}{2}$$

$$\text{de même } y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{AB \times \cos(a)}{2}$$

Nous remarquons sous nos yeux ébahis que

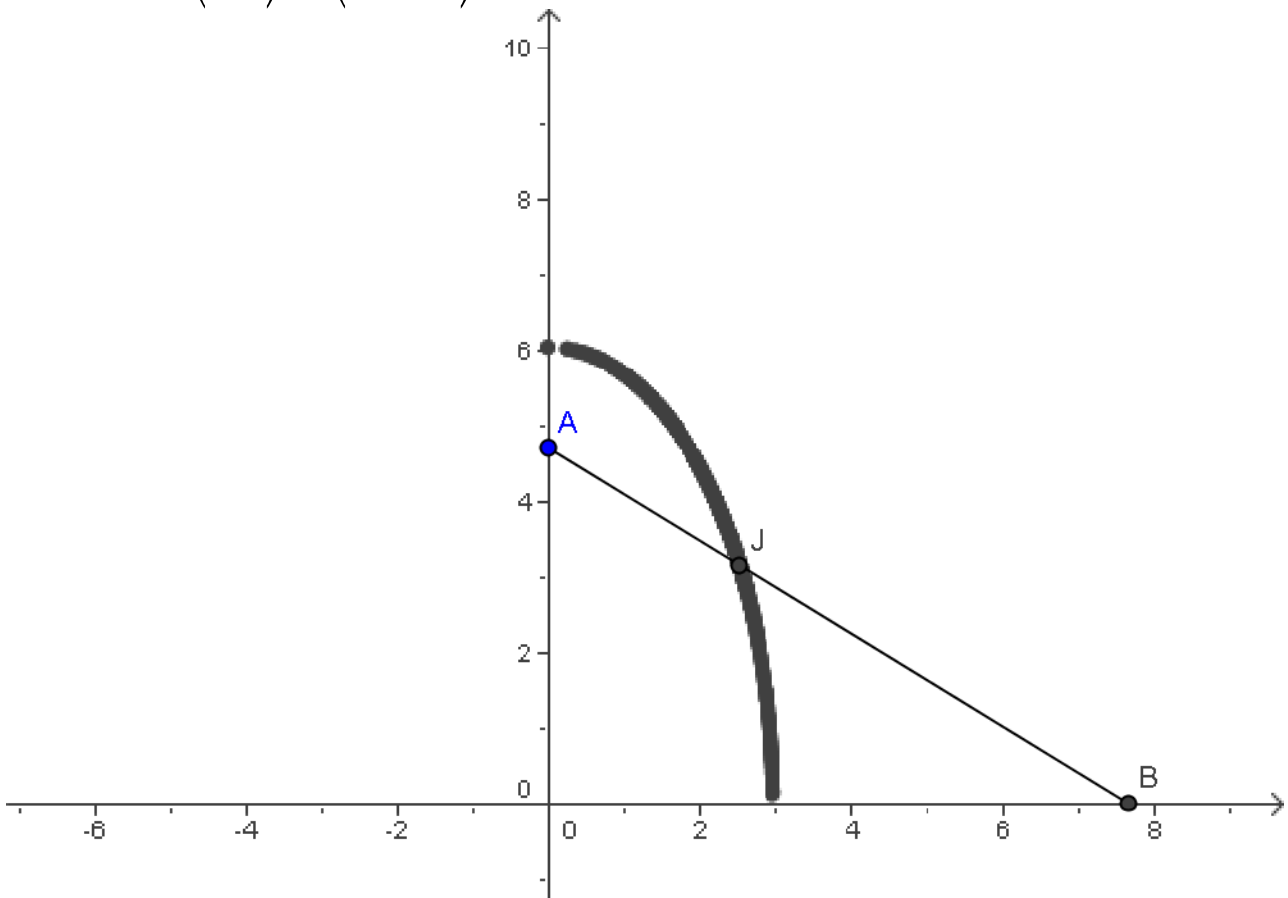
$$x_I^2 + y_I^2 = \frac{AB^2 \times \sin^2(a)}{2^2} + \frac{AB^2 \times \cos^2(a)}{2^2} = \frac{AB^2}{2^2} \times (\cos^2(a) + \sin^2(a)) = \frac{AB^2}{4} \text{ donc les coordonnées du point I}$$

vérifient l'équation du cercle de centre O et de rayon  $\frac{AB}{2}$

### conjecture pour le point J :

Le point J appartient à une ellipse de centre O et de grand axe  $\frac{2}{3} \times AB$  et de petit axe  $\frac{AB}{3}$ , c'est à dire la

courbe d'équation  $\left(\frac{x}{\frac{AB}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{2 \times AB}{3}}\right)^2 = 1$



### Démonstration :

d'après les règles trigonométriques dans le triangle rectangle :

$OA = AB \times \cos(a)$  et  $OB = AB \times \sin(a)$  donc  $A(0 ; AB \times \cos(a))$  et  $B(AB \times \sin(a) ; 0)$

J vérifie  $\vec{AJ} = \frac{1}{3} \cdot \vec{AB}$  donc  $x_j - x_A = \frac{1}{3} \times (x_B - x_A) = AB \times \sin \frac{(a)}{3}$  donc  $x_j = AB \times \sin \frac{(a)}{3}$  et

$y_j - y_A = \frac{1}{3} \times (y_B - y_A) = -AB \times \cos \frac{(a)}{3}$  donc

$$y_j = -AB \times \cos \frac{(a)}{3} + y_A = -AB \times \cos \frac{(a)}{3} + AB \times \cos(a) = \frac{2}{3} \times AB \times \cos(a)$$

Nous remarquons sous nos yeux ébahis que  $4 \times x_j^2 + y_j^2 = \frac{4 \times AB^2 \times \sin^2(a)^2}{3^2} + \frac{2^2 \times AB^2 \times \cos^2(a)^2}{3^2}$

$$4 \times x_j^2 + y_j^2 = \frac{4 \times AB^2}{9} \times (\cos^2(a) + \sin^2(a)) = \frac{4 \times AB^2}{9} = \left(\frac{2}{3} \times AB\right)^2 \text{ d'où } \frac{4 \times x_j^2}{4 \times AB^2} + \frac{y_j^2}{4 \times AB^2} = 1$$

c'est à dire :  $\frac{x_j^2}{\frac{AB^2}{9}} + \frac{y_j^2}{\frac{4 \times AB^2}{9}} = \left(\frac{x_j}{\frac{AB}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y_j}{\frac{2 \times AB}{3}}\right)^2 = 1$

donc les coordonnées du point I vérifient l'équation de l'ellipse de centre O, de grand axe  $\frac{2}{3} \times AB$  et de petit axe

$$\frac{AB}{3}$$

## Prise en main de géogébra

### Téléchargement :

il y a une fiche sur le site [www.framasoft.org](http://www.framasoft.org) à l'adresse <http://www.framasoft.net/article3455.html> avec un téléchargement sur le site officiel :

Platform	Avec l'environnement Java 1.5 (de 17,3 à 19,4 Mo)	sans Java (si vous avez déjà installé star office 8 par exemple) de 2,5 à 3,5 Mo
 Windows	<a href="http://www.geogebra.at/download/InstData/Windows/VM/geogebra_setup_jre.exe">http://www.geogebra.at/download/InstData/Windows/VM/geogebra_setup_jre.exe</a>	<a href="http://www.geogebra.at/download/InstData/Windows/NoVM/geogebra_setup.exe">http://www.geogebra.at/download/InstData/Windows/NoVM/geogebra_setup.exe</a>
 Mac OS X		<a href="http://www.geogebra.at/download/InstData/MacOSX/geogebra_setup.sit">http://www.geogebra.at/download/InstData/MacOSX/geogebra_setup.sit</a>
 Linux / Unix	<a href="http://www.geogebra.at/download/InstData/Linux/VM/geogebra_setup_jre.sh">http://www.geogebra.at/download/InstData/Linux/VM/geogebra_setup_jre.sh</a>	<a href="http://www.geogebra.at/download/InstData/Linux/NoVM/geogebra_setup.sh">http://www.geogebra.at/download/InstData/Linux/NoVM/geogebra_setup.sh</a>

ainsi qu'une présentation par l'exemple : <http://www.framasoft.net/article3531.html>

 <a href="http://www.framasoft.net/IMG/UtiliserGeoGebra.pdf">http://www.framasoft.net/IMG/UtiliserGeoGebra.pdf</a> Prise en main du logiciel GeoGebra PDF - 69.3 ko	 <a href="http://www.framasoft.net/IMG/UtiliserGeoGebra.sxw">http://www.framasoft.net/IMG/UtiliserGeoGebra.sxw</a> Prise en main du logiciel GeoGebra OpenOffice - 38.6 ko
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### Création de la figure de l'exercice : partie géométrique

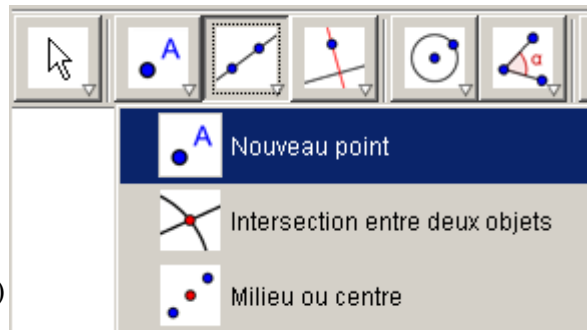
#### étape 1 : faire apparaître les axes

menu affichage/axes

#### étape 2 : créer un point A sur l'axe des ordonnées

choisir le mode nouveau point

positionner le curseur sur l'axe des ordonnées puis double-cliquer le fait de se positionner sur l'axe fera du point A, un point de l'axe (Oy)



#### étape 2bis : vérifier les propriétés d'un objet

pour le vérifier, il est possible d'accéder à la définition du point A en cliquant bouton droit sur le point A

Le menu ci-contre apparaît :

On note à la première ligne, le mode de définition du point **Point A : point sur AxeY**

On constate que l'on peut dans ce menu, définir l'affichage de l'objet (avec son étiquette) et passer en mode trace (utile pour les points I et J)

Dans le cas où ce mode de définition du point ne serait pas le bon, il est possible de le **redéfinir** : une boîte de saisie apparaît où il faut noter **A = Point[axeY]**

Le nomenclature des points étant automatique, on sera amené à **renommer** les points de la figure (ce sera le cas pour les points I et J)

#### étape 3 : créer un point B comme point d'intersection

Le point B peut être considéré comme un point d'intersection entre l'axe des abscisses et le cercle de centre A et de rayon choisi.

Il faut donc commencer par déterminer le cercle de centre A et de rayon que l'on trouvera dans le menu cercles

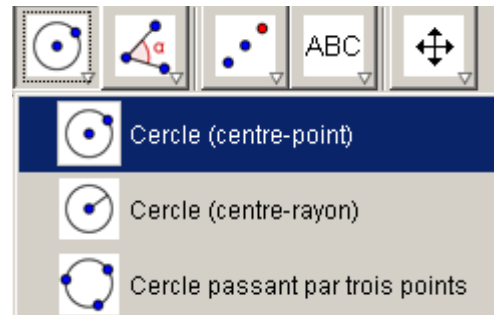


Il faut choisir Cercle (*centre-point*)

Il faut cliquer (gauche) sur le centre (ici A) puis saisir le rayon (par exemple 9)

Il suffit alors de créer le point B comme *intersection* du cercle et de l'axe des abscisses „,Pour ce faire, deux possibilités :

- création de B comme simple point d'intersection :  
en mode « **nouveau point** », il suffit de *placer le curseur à l'intersection* des deux courbes (l'une au moins passe en gras) et de *double cliquer*
- création de tous les points d'intersection possibles :  
se placer en mode « intersection de deux objets », sélectionner le cercle (qui passe en gras) puis l'axe des abscisses (idem) et le point est créé



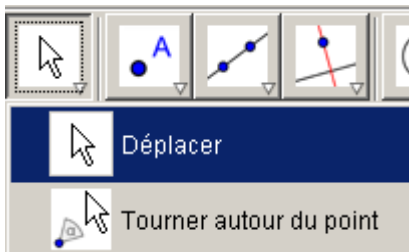
**remarques:** pour la suite cacher le cercle C (clic droit sur le cercle puis décocher « afficher l'objet »)

#### étape 4 : Créer le segment [AB]

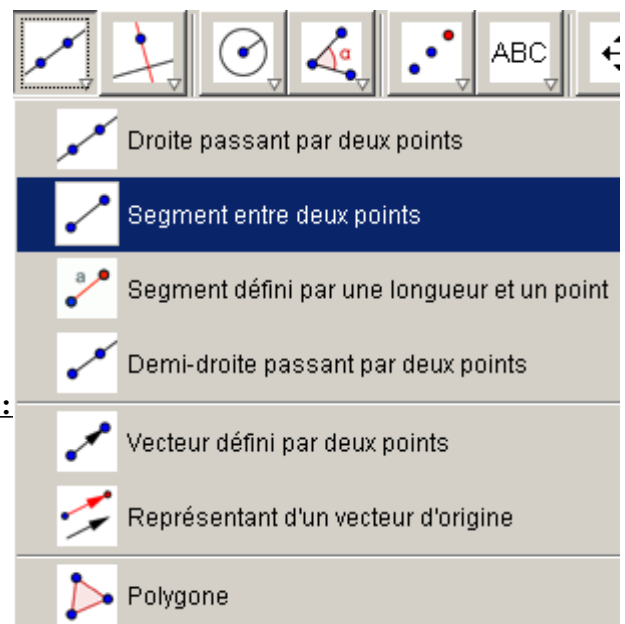
Choisir dans le menu « segment entre deux point » puis cliquer sur A puis sur B

#### étape 5 : Déplacer le point A

Pour déplacer le point A, choisir l'icône « déplacer » puis cliquer en maintenant appuyé sur le point A (le curseur se transforme en main)



**pilotage au clavier :**  
cliquer sur le point A puis utiliser les touches + ou -  
**pour modifier le pas de pilotage :**  
clic droit sur A puis propriété et modifier la valeur de *incrément*



#### étape 6 : obtenir le point I et sa trace lors du déplacement de A

Créer le point I comme milieu de [AB] dans le menu « nouveau point », choisir « milieu ou centre »

- soit cliquer sur le segment
- soit cliquer sur les points A et B

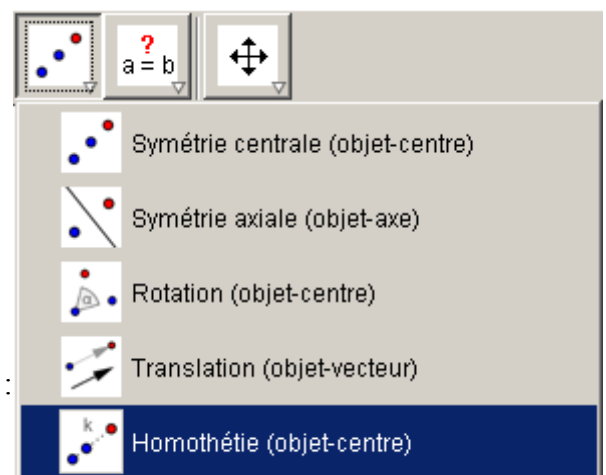
Pour **obtenir la trace du point I**, il suffit de cliquer droit et de choisir « *trace activée* » dans le menu contextuel  
Bouger le point A

#### remarques :

- On peut effacer la trace par le menu affichage/rafraîchir
- penser à renommer les points afin qu'ils s'appellent I (puis J pour l'étape suivante)
- tracer le cercle de centre O et passant par I (cercle/ cercle par le centre et un point)

#### étape 7 : Créer le point J

Nous allons utiliser une homothétie centre A et de rapport  $\frac{1}{3}$  :  
cliquer d'abord sur le point puis le centre puis indiquer le rapport d'homothétie



Activer la trace du point J et essayer de tracer l'ellipse obtenue en vous servant du menu cercle pbm : il faut 5 points !

## Utilisation de la figure de l'exercice : partie algébrique

nous avons vu la partie GEO de GEOgebra, voyons la partie ALGEBRA

### étape 1 : voir les éléments algébriques

menu affichage/fenêtre algèbre

**remarque :** Vous pouvez y lire l'équation cartésienne des cercles utilisés

### étape 2 : ajouter des éléments par leur définition algébrique (ou géométrique)

Il est possible de créer des éléments par leur description

- géométrique ... voir la définition du point A par exemple
- algébrique

Il suffit d'**utiliser la fenêtre de saisie** (si elle n'est pas présente, on peut l'obtenir par le menu affichage/fenêtre de saisie »

Celle-ci s'affiche en bas de la figure



**obtention d'une conique :** il suffit d'indiquer son nom puis son équation quadratique

exemple : l'équation de l'ellipse cherchée peut s'écrire  $4 \times x^2 + y^2 = 36$

on écrira dans la zone de saisie **trouv :  $4x^2+y^2=36$**

**remarque :** le  $^2$  s'obtient par la touche qui se trouve entre la touche de tabulation et l'« échap » (en haut à gauche)

### étape 3 : Utilisons des paramètres – phase 1 : longueur AB

Lors de notre construction, j'ai choisi arbitrairement la longueur de AB (j'avais choisi 9 stocké dans a rayon du premier cercle utilisé pour obtenir b )

Dans la fenêtre algébrique, double cliquer sur a et modifier la valeur (par exemple, en mettant 15)  
quels sont les éléments de la figure qui ne se sont pas adaptés ?

Il faut donc modifier l'équation de l'ellipse l'écrivant en fonction de a= AB  
pour cela, clic droit sur l'équation de **trouv** dans la fenêtre algébrique et choisir **redéfinir**

Une écriture possible est  $4x^2 + y^2 = a^2 \cdot 4/9$

### étape 3bis : Utilisons des paramètres – phase 2 : position de J sur [AB]

Il faut donc redéfinir le point J en un point mobile sur [AB]

**remarques :**

- recréer un nouveau point K mobile sur [AB], noter sa définition et l'utiliser pour redéfinir le point J
- après sa redéfinition (par clic droit redéfinir), IJ passe des « objets dépendants » à la catégorie « points libres »

Pour modifier l'équation de l'ellipse en conséquence, il faut déterminer le petit axe et le grand axe en s'appuyant sur les distances AJ, BJ et AB

**notation :** en mode calcul, la distance AB se calcule par distance [ A , B]

aide : l'équation de l'ellipse peut s'écrire : **trouv:  $x^2 / \text{Distance}[A, J]^2 + y^2 / \text{Distance}[J, B]^2 = 1$**

**Bouger le point J ... C'est pas beau la vie ?**